FACIT

# Några uppgifter om differentialekvationer

*Uppgifterna är tänkta att lösas utan miniräknare*

**1.** Visa att $y = 4x^2 - 4x$ är en lösning till differentialekvationen

$y' + 2y = 8x^2 - 4$

$y = 4x^2 - 4x$
$y' = 8x - 4$
$\Rightarrow VL = y' + 2y = (8x-4) + 2(4x^2 - 4x)$
$= 8x - 4 + 8x^2 - 8x = 8x^2 - 4 = HL$

VSV.

**2.** Undersök om funktionen $y = 5e^{-3t}$ löser differentialekvationen $\frac{dy}{dt} - 3y = 0$

"$\frac{dy}{dt}$" $= y'$

$y = 5e^{-3t}$
$y' = -15e^{-3t}$
$\Rightarrow VL = y' - 3y = -15e^{-3t} - 3 \cdot 5e^{-3t}$
$= -15e^{-3t} - 15e^{-3t} = -30e^{-3t} \neq 0$

$\Rightarrow y = 5e^{-3t}$ löser INTE diff. ekv.

**3.** Nedanstående uppgift är ifrån ett gammalt NP. Lös uppgiften.

En fågelunge faller från en 8,0 m hög klippa. För att förenklat beskriva fallrörelsen kan följande differentialekvation ställas upp:

$\frac{dv}{dt} + 5v = 10$ där $v$ är fallhastigheten i m/s efter tiden $t$ sekunder.

a) Visa att $v(t) = 2 - 2 \cdot e^{-5t}$ är en lösning till differentialekvationen. (1/0/0)

"$\frac{dv}{dt}$" $= v'$

$v = 2 - 2e^{-5t}$
$v' = +10e^{-5t}$
$\Rightarrow VL = v' + 5v = 10e^{-5t} + 5 \cdot (2 - 2e^{-5t})$
$= 10e^{-5t} + 10 - 10e^{-5t} = 10 = HL$

VSV.

**4.** Utgå från differentialekvationen $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

$$\text{"}\frac{dy}{dx}\text{"} = y'$$

a) Visa att $y = 5e^{2x}$ INTE är en lösning till differentialekvationen

$y = 5e^{2x}$
$y' = 10e^{2x}$ $\Rightarrow VL = y' + 2y = 10e^{2x} + 2\cdot 5e^{2x} = 20e^{2x} \neq 0$

$y = 5e^{2x}$ är INTE en lösning VSV.

b) Testa istället med lösningen $y = 5e^{ax}$ och bestäm det värde på $a$ som gör att $y$ blir en lösning till differentialekvationen.

$y = 5e^{ax}$
$y' = 5ae^{ax}$ $\Rightarrow VL = y' + 2y = 5ae^{ax} + 2\cdot 5e^{ax} =$

$= \left[\begin{array}{c}\text{Bryt ut} \\ e^{ax}\end{array}\right] = e^{ax}(5a + 10)$

Om det ska bli noll krävs att $5a + 10 = 0$
$\Rightarrow \underline{a = -2}$

**5.** Bestäm det värde på konstanten $k$ som gör att $y = 2e^{kx}$ blir en lösning till differentialekvationen $2y' + 3y = e^{kx}$

$y = 2e^{kx}$
$y' = 2ke^{kx}$ $\Rightarrow VL = 2\cdot\underbrace{2ke^{kx}}_{y'} + 3\cdot\underbrace{2e^{kx}}_{y} = \left[\begin{array}{c}\text{Bryt ut} \\ e^{kx}\end{array}\right] =$

$= e^{kx}(4k + 6)$

För lösning krävs att
$4k + 6 = 1 \Rightarrow$
$k = -\frac{5}{4}$

**6.** Differentialekvationen $y'' - 4y' - 5y = 0$ har två lösningar som båda kan skrivas på formen $y = e^{rx}$

a) Undersök om den ena lösningen fås då $r = 5$

$r = 5 \Rightarrow y = e^{5x}$

$y = e^{5x}$
$y' = 5e^{5x}$
$y'' = 25e^{5x}$ $\Rightarrow VL = 25e^{5x} - 4\cdot 5e^{5x} - 5e^{5x} =$

$= 25e^{5x} - 20e^{5x} - 5e^{5x} = 0 = HL$

$\Rightarrow$ Ja, $r = 5$ ger ena lösningen.

b) Bestäm ekvationens båda lösningar.

$y = e^{rx}$
$y' = re^{rx}$
$y'' = r^2e^{rx}$ $\Rightarrow VL = y'' - 4y' - 5y = r^2e^{rx} - 4re^{rx} - 5e^{rx}$

$= \left[\begin{array}{c}\text{Bryt ut} \\ e^{rx}\end{array}\right] = e^{rx}(r^2 - 4r - 5)$

Om det ska bli noll krävs att
$r^2 - 4r - 5 = 0$ $\Rightarrow$ "p-q" ger:
$r = 2 \pm 3 \Rightarrow$ $r_1 = 5$, $r_2 = -1$

$\boxed{y_1 = e^{5x} \quad y_2 = e^{-x}}$